

тотами $\omega_i = \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_N)$, $i = 1, 2, \dots, 3$ угл. переменные θ_i , характеризующие положение фазовой точки на торе, определяются из ур-ний

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_N) \text{ или } \theta_i = \omega_i t + \text{const}, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Из теоремы Лиувилля следует, что для полной интегрируемости гамильтоновой системы достаточно знать N интегралов движения. Совокупности всех комплектов $\{I_i\}$ соответствует семейство инвариантных торов. Торы являются инвариантными, т.к. их положение и форма в фазовом пространстве не меняются со временем.

Углам θ_i соответствуют канонически сопряжённые им обобщённые импульсы (действия) I_i , так что ур-ния движения имеют вид

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_i} = 0, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_N), \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

(первое ур-ние — следствие сохранения I_i). В соответствии с теоремой Лиувилля гамильтониан H_0 системы может быть записан в виде $H_0(I_1, I_2, \dots, I_N)$.

Действие возмущения на систему описывается гамильтонианом

$$H = H_0(I_1, I_2, \dots, I_N) + \varepsilon V(I_1, I_2, \dots, I_N; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N; t), \quad (9)$$

где углы θ_i и действия I_i — канонически сопряжённые переменные по отношению к гамильтониану H_0 , ε — малый параметр, εV — потенциал возмущения. Предполагаются финитность невозмущённого движения и его невырожденность: $\det |\partial^2 H_0 / \partial I_i \partial I_k| \neq 0$.

Согласно теории устойчивости Колмогорова — Арнольда — Мозера (1963) (КАМ), в системе с гамильтонианом (9) при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0$ большинство инвариантных торов сохраняется и отличается от невозмущённых торов слабой деформацией. Они занимают фазовый объём $\Gamma - \delta\Gamma(\varepsilon)$. Часть торов, занимавшая объём $\delta\Gamma(\varepsilon)$, разрушается, но их мера стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Траектории в $\delta\Gamma(\varepsilon)$ — стохастические. Хаос является альтернативой устойчивости, описываемой теорией КАМ. Исследование геометрии областей, в к-рых нет устойчивости и есть хаос, составляет важную часть разл. физ. задач.

Примеры систем с хаосом. 1. Рассеяние материальной точки на шариках радиусом R (рис. 4). Из рис. 4 видно

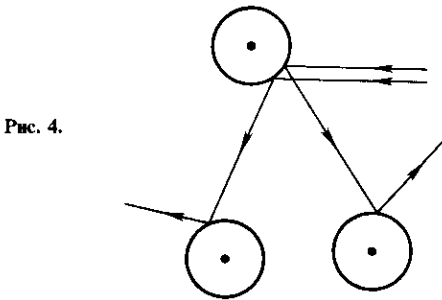


Рис. 4.

существование локальной неустойчивости. Данная задача эквивалентна задаче о рассеянии двух шариков радиусом $R/2$ каждый. Возникновение локальной неустойчивости в этой ситуации исследовано Крыловым. Критерий возникновения неустойчивости записывается в виде $K = \rho/R > 1$, где ρ — длина свободного пробега материальной точки в «газе» из неподвижных шариков. Если t_0 — характерное время между соударениями, то К-энтропия $h \sim (1/t_0) \ln K$.

2. Рассеивающие бильярды (бильярд Синая). Обобщение предыдущей модели, в к-рой вместо рассеивающих шаров имеется кривая граница. Пример бильярда

Синая дан на рис. 5. Для таких объектов характерна выпуклая граница (по отношению к налетающей частице).

Др. тип бильярда реализуется, если граница вогнутая (по отношению к частице). На рис. 6 показан пример бил-

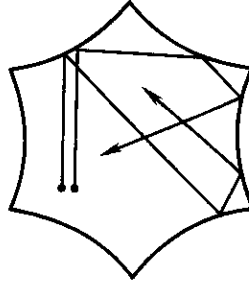


Рис. 5.

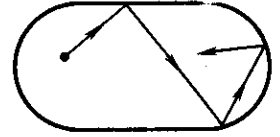


Рис. 6.

лиарда типа «стадион». В этом бильярде движение частицы также стохастическое. Вообще, почти все криволинейные формы бильярдов, в к-рых столкновения частиц со стенками происходят по законам абсолютно упругого удара, приводят к стохастич. траекториям частиц.

3. Отображение

$$x_{n+1} = \{Kx_n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Здесь индекс n играет роль дискретного времени, K — параметр, а скобки $\{ \dots \}$ означают дробную часть числа. Соотношение (10) задаёт отображение отрезка $[0, 1]$ в себя. При $K < 1$ из (10) следует $x_n = K^n x_0 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ независимо от выбора нач. значения $x_0 \in [0, 1]$. При $K > 1$ расстояние между двумя близкими траекториями растёт:

$$\delta x_{n+1} / \delta x_n = K > 1. \quad (11)$$

Отсюда $\delta x_n = K^n \delta x_0 = \exp(n \ln K) \delta x_0$, где инкремент неустойчивости $h_\sigma = \ln K$ одинаков для всего фазового пространства и является К-энтропией: $h = \ln K$.

4. Двумерное отображение

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ mod } 1, \quad (12)$$

где матрица $A = \begin{pmatrix} K+1 & 1 \\ K & 1 \end{pmatrix}$. В силу $\partial(x_{n+1}, y_{n+1}) / \partial(x_n, y_n) = \det A = 1$ отображение (12) сохраняет фазовый объём системы. Характеристические показатели находятся из ур-ния $\lambda^2 - (K+2)\lambda + 1 = 0$. При $K > 0$ один из корней $\lambda_1 = [K+2 + \sqrt{(K+2)^2 - 4}] / 2$ больше единицы, чем и определяется локальная неустойчивость. Отображение (12) диагоналізується и имеет в направлении первого орта растяжение элементов длины

$$\delta r_{n+1} = \lambda_1 \delta r_n, \quad r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Соответственно К-энтропия равна $h = \ln \lambda_1$.

5. Ротатор, испытывающий периодические толчки. Эта модель встречается в разл. задачах физики. Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p^2 - K \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (13)$$

Невозмущённый гамильтониан $H_0 = p^2/2$ задаёт пару канонически сопряжённых переменных (p, x) , причём $\omega(p) = \partial H_0 / \partial p = p$. В переменных (p, x) ур-ния движения имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -K \sin x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p. \quad (14)$$

От ур-ний (14) можно перейти к точечному отображению. Согласно (14), после n -го толчка импульс приобретает приращение: $p_{n+1} - p_n = -K \sin x_n$, а при дальнейшем движении до начала $(n+1)$ -го толчка сохраняет значение p_{n+1} .